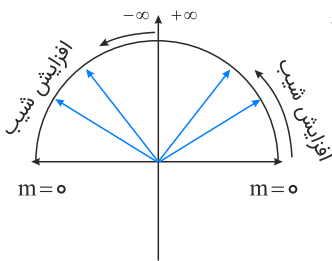




گزینه ۲

۱

نکته: در ناحیه اول هرچه از حالت افقی (در جهت مثلثاتی) به محور y ها نزدیک می‌شویم، شیب افزایش می‌یابد و در ناحیه دوم هرچه از محور y ها به محور x ها نزدیک می‌شویم، مجدداً شیب افزایش می‌یابد. باتوجه به نکته بالا $f'(c) = 0$ و در نقاط b و d شیب منفی است ولی $f'(b)$ کمتر از $f'(d)$ است. ضمناً واضح است که شیب در a مثبت است.



گزینه ۴

۲

مختصات دو نقطه به طول‌های ۲ و ۳ روی f را کامل می‌کنیم: $A(2, 7)$ و $B(-3, 2)$ است، پس شیب AB برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{7 - 2}{2 + 3} = 1$$

خطی که بر AB عمود است باید شیبش $\frac{-1}{m_{AB}}$ یعنی -1 باشد. پس باید مشتق تابع f در نقطه C برابر -1 باشد:

$$f'(x) = \frac{3(x-1) - 1(3x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2} = -1 \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3 \Rightarrow C = (3, 5) \\ x_C = -1 \times \end{cases}$$

معادله مماس بر f در C را می‌نویسیم:

$$y - 5 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{عرض از مبدأ}}}{8}$$

کافی است از عامل صفر کننده تابع یعنی $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ مشتق بگیریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x} \times \left(\frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} \right)$$

$$\xrightarrow{x=1} 1 \times \left(\frac{2(2) - 0}{2^2} \right) = 1 \times 1 = 1$$

در عبارت $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 16} = \frac{1}{4}$ حد مخرج صفر است ولی حد کسر، عددی حقیقی است؛ پس باید حد صورت هم صفر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 4} (f(x) - 2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2 \xrightarrow{f \text{ پیوسته بودن}} f(4) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 16} = \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{(x - 4)(x + 4)} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4} \times \frac{1}{x + 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} f'(4) = \frac{1}{4} \Rightarrow f'(4) = 2$$

حال مشتق تابع $y = \frac{1}{x} f(x^2)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y' = \frac{-1}{x^2} f(x^2) + \frac{1}{x} f'(x^2) (2x)$$

$$\Rightarrow y'(2) = \frac{-1}{4} f(4) + \frac{1}{2} f'(4) (4) = \frac{-1}{4} (2) + 2(2) = \frac{7}{2}$$

خط $y + 2x = 3$ در $x = 2$ بر تابع f مماس است، پس:
اولاً: در این نقطه، مقدار یکسانی دارند:

$$y + 4 = 3 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow f(2) = -1$$

ثانیاً: شیب این خط، برابر با مشتق تابع f در $x = 2$ است:

$$f'(2) = -2$$

از حد $3 = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) + 4}{x^2 - 1}$ ، دو نتیجه می‌گیریم:

اولاً: حد مخرج صفر و حاصل حد کل کسر موجود است، پس حد صورت هم صفر می‌باشد:

$$g(-1) + 4 = 0 \Rightarrow g(-1) = -4$$

ثانیاً: حد ساده می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \underbrace{\frac{g(x) - g(-1)}{(x-1)(x+1)}}_{-2} = 3 \xrightarrow{\frac{g(x)-g(-1)}{(x+1)}=g'(-1)} \frac{g'(-1)}{-2} = 3 \Rightarrow g'(-1) = -6$$

حال با اطلاعات فوق، داریم:

$$(g \circ f)'(2) = f'(2) \cdot \underbrace{g'(f(2))}_{-1} = \underbrace{f'(2)}_{-2} \times \underbrace{g'(-1)}_{-6} = 12$$

برای اینکه عرض نقطه A و عرض نقطه دوم برابر باشند، باید خط مماس افقی باشد؛ یعنی شیب مماس صفر است، پس:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

پس مختصات نقطه A به صورت $(1, -2)$ یا $(-1, 2)$ است که معادله مماس در آن‌ها به ترتیب $y = -2$ و $y = 2$ است. فقط خط $y = 2$ جهت مثبت محور y را قطع می‌کند که عرض آن نقطه نیز ۲ است.

از آنجا که $D_{f'} = \mathbb{R} - \{a, 2\}$ ، پس نقاط $x = a$ و $x = 2$ تنها نقاط مشتق‌ناپذیر تابع f هستند.
 از طرفی می‌دانیم که تابع $f(x) = \frac{|x+1|}{x+b}$ در نقاط $x = -1$ به عنوان ریشه ساده داخل قدر مطلق (نقطه گوشه) و $x = -b$ به عنوان ریشه مخرج (تعریف نشده و ناپیوسته) مشتق‌ناپذیر است.
 پس:

$$\begin{cases} a = -1 \\ -b = 2 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

و لذا: $a + b = -3$

$$f(x) = f(x+3) \Rightarrow \begin{cases} f(6+h) = f(6+h+3) = f(9+h) \\ f(6) = f(6+3) = f(9) \\ f(9) = f(9+3) = f(12) \end{cases} \Rightarrow f(12) = f(6)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(9+h) - f(12)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = f'(6)$$

می‌دانیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1) - f(1-2h^2)}{2h^2} = \frac{2}{3} f'_-(1)$$

یعنی کافی است مشتق چپ تابع f را در $x = 1$ از ضابطه بالایی حساب کرده و در $\frac{2}{3}$ ضرب کنیم.
 اما دقت کنید تابع f در $x = 1$ از سمت چپ پیوسته نیست:

$$\begin{cases} \text{ضابطه پایین: } f(1) = 3 \\ \text{ضابطه بالا: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 \end{cases}$$

پس این تابع در $x = 1$ از سمت چپ قطعاً مشتق‌ناپذیر است و حاصل این حد وجود ندارد.

می‌دانیم $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1)$ پس داریم:

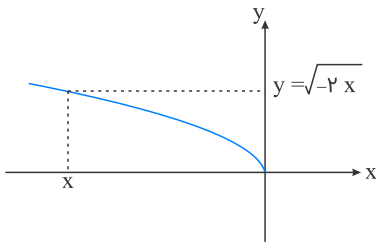
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{3h^2 - h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h(3h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \times \frac{1}{3h-1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (f'(-1) \times \frac{1}{3h-1}) = f'(-1) \times (-1) = -2 \Rightarrow f'(-1) = 2 \end{aligned}$$

ابتدا حد داده شده را به صورت زیر تغییر شکل می‌دهیم، سپس مقدار تابع $f(x)$ در $x = -1$ را همان مقدار خط مماس در نقطه $x = -1$ و مشتق تابع در نقطه $x = -1$ را شیب خط مماس بر آن می‌گذاریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^2(x) + f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)(f^2(x) + 1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \frac{(f(x) + 1)(f^2(x) - f(x) + 1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \frac{(f(x) - (-1))(f^2(x) - f(x) + 1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \frac{(f(x) - f(-1))(f^2(x) - f(x) + 1)}{x - (-1)} \\ &= f(-1)f'(-1)(f^2(-1) - f(-1) + 1) \\ &= (-1)(-4)((-1)^2 - (-1) + 1) = (-1)(-4)(3) = 12 \end{aligned}$$

دقت کنید که در نقطه تماس، مختصات و شیب تابع با مختصات و شیب خط مماس بر آن برابر است.

مساحت مستطیل ایجاد شده به صورت $S(x) = x(\sqrt{-2x})$ می‌شود. آهنگ تغییرات لحظه‌ای را می‌خواهیم، پس از S مشتق می‌گیریم.



$$S'(x) = 1 \times \sqrt{-2x} + \frac{-2}{2\sqrt{-2x}} \times x = \sqrt{-2x} - \frac{x}{\sqrt{-2x}}$$

$$S'(-18) = \sqrt{36} - \frac{(-18)}{\sqrt{36}} = 6 + \frac{18}{6} = 6 + 3 = 9$$

اگر $f(x) = \frac{ax^3 + 3}{2x - 1}$ در $x = 1$ بر خط $y = 3x - b$ مماس باشد، باید:

$$f'(1) = 3 \Rightarrow f'(x) = \frac{3ax^2(2x - 1) - 2(ax^3 + 3)}{(2x - 1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{3a(1) - 2(a + 3)}{1} = \frac{a - 6}{1} = 3 \Rightarrow a = 9$$

پس $f(x) = \frac{9x^3 + 3}{2x - 1}$ است. به علاوه باید تابع و خط در $x = 1$ باهم برخورد کنند.

$$f(1) = 3(1) - b \Rightarrow \frac{9 + 3}{1} = 3 - b \Rightarrow b = -9$$

پس $a + b = 0$ می‌شود.

اگر در تساوی $f(3x+1) = x^3 - 3x$ (*) قرار دهیم $x = 0$ ، داریم:

$$f(1) = 0 \Rightarrow (1, 0) \in f(x)$$

از طرفی اگر از همان تساوی (*) مشتق بگیریم، داریم:

$$3f'(3x+1) = 3x^2 - 3 \xrightarrow{x=0} 3f'(1) = -3 \Rightarrow f'(1) = -1$$

بنابراین معادله خط مماس بر $y = f(x) + x$ در $x = 1$ برابر است با:

$$\begin{cases} m = f'(1) + 1 = -1 + 1 = 0 \\ y_0 = f(1) + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = 1$$

بنابراین عرض از مبدأ آن ۱ است.

خط مماس بر تابع f در نقطه $x = 2$ ، از دو نقطه $A(2, 3)$ و $B(0, \frac{3}{4})$ می‌گذرد. شیب این خط را حساب می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{3}{4} - 3}{0 - 2} = \frac{3}{4} \Rightarrow f'(2) = \frac{3}{4}$$

حالا حاصل حد داده شده را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 3f(x)}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(f(x) - \overbrace{3}^{f(2)})}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-1} \\ &= f'(2) \times \frac{f(2)}{2-1} = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

برای نوشتن معادله خط مماس بر منحنی تابع f ، هم به مختصات نقطه تماس و هم به شیب خط مماس نیاز داریم. بنابراین داریم:

$$f(2) = \frac{4+2}{2-3} = -6 \Rightarrow A(2, -6) \text{ : نقطه تماس}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-3) - (1)(x^2+x)}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 3}{(x-3)^2}$$

$$f'(2) = \frac{4 - 12 - 3}{(-1)^2} = -\frac{11}{1} = -11 \Rightarrow m = -11 \text{ شیب خط مماس}$$

$$y + 6 = -11(x - 2) \Rightarrow y = -11x + 16 \text{ : معادله خط مماس}$$

$$\xrightarrow{x=0} y = 16$$

بنابراین خط مماس، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱۶ قطع می‌کند.

$$(0, 2), (4, 0) \in \ell \xrightarrow{\text{شیب}} m = \frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{معادله خط}} y = -\frac{1}{4}x + 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(2) + 2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 1 \\ f'(2) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$y = f^2(3x-1) \Rightarrow y' = 2f(3x-1)f'(3x-1)$$

$$\xrightarrow{x=1} y' = 2f'(2)f(2) = 2\left(-\frac{1}{4}\right)(1) = -\frac{1}{2}$$

اول: حد تابع را در ∞ حساب می‌کنیم. داخل قدر مطلق در ∞ عبارتی مثبت است. پس می‌توانیم قدر مطلق را حذف کنیم، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2} = \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$

اول باید تکلیف قدر مطلق را مشخص کنیم. اگر $x = (-2)^+$ باشد، آنگاه $x^2 - 4$ برابر 0^- است. زیرا:

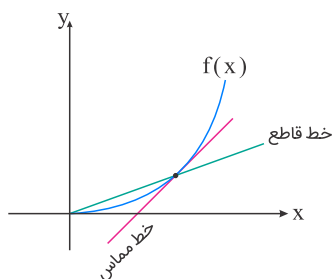
$$x^2 - 4 \xrightarrow{x=(-2)^+} ((-2)^+)^2 - 4 = 4^- - 4 = 0^-$$

پس برای آنکه $x^2 - 4$ را از قدر مطلق بیوریم باید آن را قرینه کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 - 4|}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4 - x^2}{-x^2 - x + 2}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-2x}{-2x - 1} = \frac{4}{4 - 1} = \frac{4}{3}$$

در نمودار گزینه‌های ۲ و ۴ آهنگ لحظه‌ای تغییر با آهنگ متوسط تغییر در هر بازه‌ای برابر است. شیب خط مماس و خط قاطع در هر نقطه x در گزینه ۳ رسم شده‌اند. چون شیب خط مماس بیشتر از شیب خط قاطع در این نقطه است، پس آهنگ متوسط تغییر کوچک‌تر از آهنگ لحظه‌ای تغییر است ولی در گزینه ۱ دقیقاً برعکس است.



در تمام گزینه‌ها $f(0) = 1$ است بنابراین حد فوق برابر با $f'(0)$ است؛ پس باید مشتق توابع را در $x = 0$ بررسی کنیم.

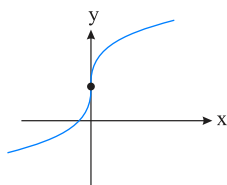
$$\text{گزینه ۱: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x^2} + 1 - 1}{x - 0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{|x|}}{x} = -\infty \end{cases}$$

$$\text{گزینه ۲: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt[3]{x} + 1 - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

$$\text{گزینه ۳: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x^2} + 1 - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2|x|}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2|x|}{x} = -2 \end{cases}$$

$$\text{گزینه ۴: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt[3]{x^2} + 1 - 1}{x - 0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = -\infty \end{cases}$$

از طریق ترسیم توابع نیز به نتایج بالا می‌توان رسید. (شکل گزینه ۲)



تابع در اطراف $x = 0$ صعودی اکید است و مماس قائم دارد؛ یعنی $f'(0) \rightarrow +\infty$

$$A \Big|_0^2, B \Big|_2^0 \in g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{6-3x}{2}$$

تابع f را باید به صورت دو ضابطه‌ای بنویسیم:

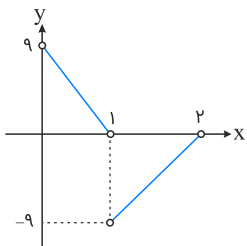
$$0 \leq x \leq 1: A \Big|_0^0, B \Big|_2^1 \in f \Rightarrow m = \frac{3-0}{1-0} = 3 \Rightarrow y = 3x$$

$$1 < x \leq 2: A \Big|_2^1, B \Big|_0^2 \in f \Rightarrow m = \frac{3-0}{1-2} = -3 \Rightarrow y-0 = -3(x-2)$$

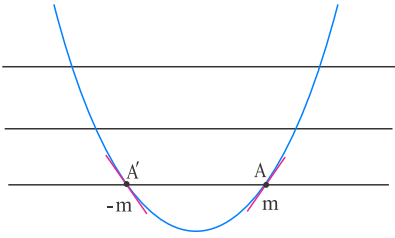
$$h(x) = \begin{cases} \frac{6-3x}{2} \times 3x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ -3(x-2) \times \frac{6-3x}{2} & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(x) = \begin{cases} 9x - \frac{9}{2}x^2 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{9}{2}x^2 - 18x + 18 & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} 9-9x & ; 0 < x < 1 \\ 9x-18 & ; 1 < x < 2 \end{cases}$$



$$\text{آهنگ متوسط تغییر حجم در بازه } [0, 25] = \frac{V(25) - V(0)}{25 - 0} = \frac{67/5 - 120}{25} = \frac{-52/5}{25} = -2/1$$



باتوجه به شکل، در دو نقطه برخورد خط افقی با سهمی مثل A و A' شیب خطوط مماس بر سهمی قرینه و جمع آنها صفر است. برای حفظ تقارن سهمی نسبت به محور تقارنش، شیب‌ها باید قرینه باشند.

از طرفین $f(x) = g(x^2)$ نسبت به متغیر x مشتق می‌گیریم.

$$f'(x) = g'(x^2) \times 2x$$

باتوجه به اینکه $g'(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ داریم:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} \times 2x = \frac{2\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$f''(x) = 2 \left(\frac{\frac{2x \times x}{2\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1}}{(x)^2} \right) = 2 \left(\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1}}{x^2} \right)$$

$$\Rightarrow f''(\sqrt{3}) = 2 \left(\frac{\frac{3}{2} - 2}{3} \right) = \frac{-1}{3}$$

از طرفین رابطه $f(x) = g(\sqrt{x})$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = g'(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = g'(2) \times \frac{1}{2 \times 2}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{g'(2)}{4} \Rightarrow g'(2) = 8$$

از طرفین رابطه $f'(x) = \frac{g'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ مشتق می‌گیریم:

$$f''(x) = \frac{g''(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} - g'(\sqrt{x}) \times \frac{2}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}$$

$$\xrightarrow{x=4} f''(4) = \frac{g''(2) - g'(2) \times \frac{1}{2}}{(2 \times 2)^2} \Rightarrow 2 = \frac{g''(2) - 4}{16}$$

$$\Rightarrow 32 = g''(2) - 4 \Rightarrow g''(2) = 36$$

آهنگ متوسط تغییر در بازه $[0, 100]$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = \frac{20(1 - \frac{100}{200})^2 - 20(1 - \frac{0}{200})^2}{100} = \frac{20 \times \frac{1}{4} - 20}{100} = -\frac{3}{20}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در نقطه $t = a$ را حساب می‌کنیم و برابر با $-\frac{3}{20}$ قرار می‌دهیم:

$$V(t) = 20(1 - \frac{t}{200})^2 \Rightarrow V'(t) = 40(1 - \frac{t}{200}) \times \frac{-1}{200} = \frac{-1}{5}(1 - \frac{t}{200})$$

$$V'(a) = -\frac{3}{20} \Rightarrow -\frac{1}{5}(1 - \frac{a}{200}) = -\frac{3}{20} \Rightarrow 1 - \frac{a}{200} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{200} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 50$$

اگر برای هر شکل و در چند نقطه مختلف خط مماس را بکشیم و روند آن‌ها را بررسی کنیم، مشخص است که گزینه موردنظر گزینه ۱ است.

می‌دانیم $f(x) = x\sqrt[3]{x} = x^{\frac{4}{3}}$ است، در نتیجه $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ می‌باشد. حال $f' \circ f(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f'(f(x)) = f'\left(x^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{9}}$$

مشتق $f' \circ f$ برابر است با:

$$\left(\frac{4}{3}x^{\frac{4}{9}}\right)' = \frac{16}{27}x^{\frac{4}{9}-1} = \frac{16}{27}x^{-\frac{5}{9}} \xrightarrow{x=1} \frac{16}{27}$$

شیب خط $1 = 3y + 4x$ برابر با $-\frac{4}{3}$ است.

پس باید نقطه‌ای روی منحنی f پیدا کنیم که مقدار مشتق در آن برابر با $-\frac{4}{3}$ باشد:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{8x}}{x} = \frac{2\sqrt[3]{x}}{x} = 2x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{3}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$f'(x) = -\frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{4}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{4}{3} \Rightarrow x^{-\frac{5}{3}} = 1 \Rightarrow x = 1$$

پس نقطه موردنظر $A(1, 2)$ است.

معادله خط گذرنده از نقطه A با شیب $m = -\frac{4}{3}$ را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

پس عرض از مبدأ این خط $\frac{10}{3}$ است.

f' را می‌نویسیم:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + kx - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + k$$

اگر خط مماس بر خط $y = x$ عمود باشد، باید شیب آن -1 باشد، پس:

$$f'(x) = -1 \Rightarrow 3x^2 - 12x + k = -1 \Rightarrow 3x^2 - 12x + k + 1 = 0$$

از طرفی طبق گفته سؤال فقط یک نقطه با این ویژگی وجود دارد، پس معادله باید یک جواب داشته باشد. درنتیجه دلتای آن باید صفر باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 144 - 12(k + 1) = 0 \Rightarrow k = 11$$

با جایگذاری $k = 11$ ، مقدار $f'(1)$ را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11 \Rightarrow f'(1) = 3 - 12 + 11 = 2$$